שאלה1: (10 נקודות)

הישרים $\frac{x-5}{2}=\frac{y+5}{4}=\frac{z-1}{a}$ ו- $\frac{x}{1}=\frac{y+1}{2}=\frac{z+2}{3}$ נמצאים במישור אחד כאשר a שווה ל...:

(א) 1 (ב) 2 (ג) 3 (ד) 4 (ה) 5 (ו) 6 (ז) 7

פתרון: קל לראות כי עבור $a=6$ הישרים מקבילים ולכן נמצאים באותו מישור.

שאלה 2: (15 נקודות)

נתונה פונקציה $f(x,y)=\int_{x^4+y^4}^{x^2+y^2} e^{at}dt$.

עבור אילו ערכים של פרמטר a הנקודה $(0,0)$ היא נקודת מקסימום מקומי.

א) עבור $a>0$ בלבד
ב) עבור $a=0$ בלבד
ג) עבור $a<0$ בלבד
ד) עבור כל הערכים של a
ה) לא קיים אף ערך של a

הערה: מומלץ לפתור שאלה זו על ידי שימוש ישיר בהגדרה

פתרון: ברור כי $f(0,0)=0$. בנוסף, האינטגרנד חיובי ובסביבה די קטנה של הראשית $x^4+y^4<x^2+y^2$. לכן לפי תכנות של אינטגרל מסוים (משפט ערך הביניים) מתקיים:

$f(x,y)=\int_{x^4+y^4}^{x^2+y^2} e^{at}dt \geq 0 = f(0,0)$ עבור כל נקודה (x,y) בסביבה די קטנה של הראשית. מהגדרת מינימום מקומי נובע כי הראשית הינה נקודת מינימום מקומי.
התשובה הנכונה: ה.

שאלה 3: (15 נקודות)

נתונה פונקציה $f(x,y)$ השייכת למחלקה $C^2(\mathbb{R}^2)$, כאשר

$$1-2x+y+x^2+xy-2y^2$$

הוא פולינום טיילור ממעלה שנייה של הפונקציה סביב הנקודה $M_0(0,0)$. עבור הפונקציה $u(t)=f(\ln t, t^2-1)$ מתקיים:

א) הנקודה $t=1$ הינה נקודת עלייה
ב) הנקודה $t=1$ הינה נקודת ירידה
ג) הנקודה $t=1$ הינה נקודת מינימום מקומי
ד) הנקודה $t=1$ הינה נקודת מקסימום מקומי
ה) הנקודה $t=1$ הינה נקודת פיתול
ו) אף אחת מהתשובות הקודמות אינה נתונה
ז) לא ניתן לדעת את ההתנהגות בנקודה $t=1$ מהנתונים בשאלה

פתרון

$$u'(t)=f'_x(\ln t,t^2-1)\frac{1}{t}+f'_y(\ln t,t^2-1)2t$$

$$u'(1)=f'_x(0,0)\frac{1}{1}+f'_y(0,0)2=-2+1\cdot 2=0$$

$$u''(t)=\left(f''_{xx}(\ln t,t^2-1)\frac{1}{t}+f''_{xy}(\ln t,t^2-1)2t\right)\frac{1}{t}-f'_x(\ln t,t^2-1)\frac{1}{t^2}+$$

$$+\left(f''_{yx}(\ln t,t^2-1)\frac{1}{t}+f''_{yy}(\ln t,t^2-1)2t\right)2t+f'_y(\ln t,t^2-1)2$$

$$u''(0)=\left(f''_{xx}(0,0)+2f''_{xy}(0,0)\right)-f'_x(0,0)+$$

$$+\left(f''_{yx}(0,0)1+2f''_{yy}(0,0)\right)2+2f'_y(0,0)=(2+2)+2+(1-8)2+2=-6<0$$

נקודת מקסימום. התשובה הנכונה :ד.

שאלה 4: (10 נקודות)

נתונה פונקציה $f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{x^3+|y|^3}{x^2+|y|} & ,(x,y)\neq(0,0)\\ 0 & ,(x,y)=(0,0)\end{cases}$.

האם הפונקציה דיפרנציאבילית בנקודה $(0,0)$?

פתרון : $f'_x(0,0)=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x,0)-f(0,0)}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\frac{x^3}{x^2}-0}{x}=1$

$$f'_y(0,0)=\lim_{y\to 0}\frac{f(0,y)-f(0,0)}{y}=\lim_{y\to 0}\frac{\frac{|y|^3}{|y|}-0}{y}=\lim_{y\to 0}\frac{|y|^2}{y}=0$$

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\frac{f(x,y)-f(0,0)-f'_x(0,0)x-f'_y(0,0)y}{\sqrt{x^2+y^2}}=\lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\frac{\frac{x^3+|y|^2}{x^2+|y|}-0-x-0y}{\sqrt{x^2+y^2}}=\lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\frac{|y|^2-x|y|}{(x^2+|y|)\sqrt{x^2+y^2}}$$

נתבונן בגבול לאורך מסלול $y=kx$, $k\neq 0$ ונקבל כי הגבול תלוי ב- k . הפונקציה אינה דיפרנציאבילית.